Chapitre 27 : Espaces préhilbertiens réels

Produits scalaires et normes

Exercice 1: Pour chacun des espaces E et des applications φ proposés, dire s'il s'agit d'espaces préhilbertiens réels ou pas.

1. $E=\mathbb{R}^3$ et $\varphi(x,y)=x_1y_1$;
2. $E=\mathbb{R}^2$ et $\varphi(x,y)=x_1x_2-y_1y_2$;
3. $E=\mathbb{R}_n[X]$ et $\varphi(P,Q)=\sum_{k=0}^{n}P(a_k)Q(a_k)$ pour $(a_0,...,a_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$ distincts ;
4. $E=\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et $\varphi(f,g)=f(0)g(0)+\int_0^1 f'(t)g'(t)\mathrm{d}t$;
5. $E=\mathbb{R}[X]$ et $\varphi(P,Q)=\int_{-1}^{1}P(t)Q(t)\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$.

Exercice 2: *Identité du parallélogramme*
Soit E un espace préhilbertien réel, et soient x et $y\in E$.
Montrer que $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$.

Exercice 3: Soit E un espace préhilbertien réel.
Montrer que $\forall x,y\in E\backslash\{0_E\}$, $\left|\left|\dfrac{x}{||x||^2}-\dfrac{y}{||y||^2}\right|\right|=\dfrac{||x-y||}{||x||\times||y||}$.

Exercice 4: Soit E un espace préhilbertien réel. Soit $f:E\to E$ telle que

$$\forall(x,y)\in E^2,\ (f(x)|f(y))=(x|y)$$

Montrer que f est une application linéaire de E dans E.

Cauchy-Schwarz

Exercice 5: Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel. Soit $x\in\mathbb{R}^n$ de coordonnées $(x_1,\dots,x_n)$.

1. Montrer, à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que
$$\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^2\leqslant n\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right)$$
2. On suppose de plus que $\sum_{k=1}^{n}x_k=1$ et que pour tout $i\in[\![1;n]\!]$, $x_i>0$.
Montrer que $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{x_k}\geqslant n^2$.

Exercice 6: Soit $a,b\in\mathbb{R}$. Soit $E=\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel.

1. Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans ce cas.
2. Pour $f\in E$ une fonction strictement positive sur $[a,b]$, on note
$$l(f)=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\times\int_a^b\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$$
   (a) Montrer que $\forall f\in E,\ l(f)\geqslant(b-a)^2$.
   (b) Proposer une fonction f pour laquelle $l(f)=(b-a)^2$.

Exercice 7: Pour toute fonction f continue et positive sur $[0,1]$, on pose

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad I_n=\int_0^1 t^nf(t)\mathrm{d}t\,.$$

Montrer que pour tout $(n,p)\in\mathbb{N}^2$, $I_{n+p}^2\leqslant I_{2n}I_{2p}$

Exercice 8: Montrer que pour tout $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(A)\leqslant\sqrt{n}\sqrt{\mathrm{tr}(A^TA)}$.

Orthogonal

Exercice 9: Soit E un espace euclidien.
Une isométrie vectorielle de E est un endomorphisme qui conserve la norme.
Soit f une isométrie vectorielle i.e. $f\in\mathscr{L}(E)$ et $\forall x\in E,\|f(x)\|=\|x\|$.

1. Montrer que f est un automorphisme.
2. Montrer que f conserve le produit scalaire i.e. $\forall x,y\in E,(f(x)|f(y))=(x|y)$.
3. Soit s une symétrie de E. Montrer que s est une isométrie vectorielle si et seulement si s est une symétrie orthogonale.
On dit que s est une symétrie orthogonale si ses sous-espaces caractéristiques sont orthogonaux.

Exercice 10: Soit E l'espace vectoriel réel des fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire défini par $(f|g) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\mathrm{d}t$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que la famille $(c_k)_{k\in[\![1;n]\!]}$ définie par $c_k : x \mapsto \cos(kx)$ est une famille orthonormale de E. En déduire que E est de dimension infinie.

Exercice 11: Soient E un espace euclidien, F et G sous-espaces vectoriels de E.
Démontrer que $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$ puis que $(F\cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.

Exercice 12: On définit

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}[X],\ (P|Q) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}Q(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta.$$

1. Montrer que $(.\,|\,.)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille $(X^k)_{k\in[\![0;n]\!]}$ est une famille orthonormée.

Exercice 13: Soit $E = \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel.
Notons $F = \{f \in E, f(0) = 0\}$. Déterminer $F^{\perp}$ puis $\left(F^{\perp}\right)^{\perp}$.

Exercice 14: [*] On note l^2 l'ensemble des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.

1. Montrer que, pour $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$, la série $\sum x_n y_n$ converge.
   On pose alors $((x_n)_{n\in\mathbb{N}}|(y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$.
2. Démontrer que l^2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, puis que $(.|.)$ est un produit scalaire sur l^2. On munit à présent l^2 de ce produit scalaire.
3. On considère l'ensemble F des suites nulles à partir d'un certain rang.
   Montrer que F est un sous-espace vectoriel strict de l^2. Comparer F et $\left(F^{\perp}\right)^{\perp}$.

Algorithme de Gram-Schmidt et projections

Exercice 15: On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel.
Orthonormaliser la famille suivante $u = (1,0,1)$, $v = (1,1,1)$, $w = (-1,1,0)$.

Exercice 16: Soit E un espace euclidien. Soit p un projecteur de $\mathscr{L}(E)$.

1. Supposons que p soit un projecteur orthogonal.
   Montrer que $\forall x \in E,\ ||p(x)|| \leqslant ||x||$.
2. Réciproquement, supposons que $\forall x \in E,\ ||p(x)|| \leqslant ||x||$.
   Soit $x \in \mathrm{Ker}(p),\ y \in \mathrm{Im}(p)$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que $y = p(y+\lambda x)$ puis que $||y||^2 \leqslant ||y||^2 + 2\lambda(x|y) + \lambda^2||x||^2$.
   (b) Montrer que le discriminant de $P = 2(x|y)X + ||x||^2X^2$ est négatif.
   (c) En déduire que $(x|y) = 0$ puis que p est un projecteur orthogonal.
3. Énoncer une caractérisation de l'orthogonalité d'un projecteur.

Exercice 17:
On considère le plan $P = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+y+z = 0\right\}$ et $u = (1,2,3)$.

1. Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur P relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer, de deux façons, la distance euclidienne du vecteur u au plan P.

Exercice 18: *Déterminant de Gram*
Soit E un espace euclidien. Soit $(u_1,...,u_p) \in E^p$. On note $G(u_1,....,u_p)$ la matrice de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont les produits scalaires $(u_i|u_j)$ où $(i,j) \in [\![1;p]\!]^2$.

1. Exprimer $G(1,X,X^2)$ où $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire qui vous sied.
2. Montrer que la matrice $G(u_1,....,u_p)$ est symétrique. Que vaut $G(u_1,....,u_p)$ si la famille $(u_1,\ldots,u_p)$ est une famille orthonormée ?
3. Montrer que si la famille $(u_1,...,u_p)$ est liée alors $\det(G(u_1,...,u_p)) = 0$.
4. Soit F un sous-espace vectoriel de E.
   Notons $(u_1,...,u_p)$ une base de F, p_F la projection orthogonale sur F et $p_{F^\perp}$ la projection orthogonale sur $F^{\perp}$. Soit $x \in E$, en écrivant $x = p_F(x) + p_{F^\perp}(x)$, montrer que $\det(G(u_1,...,u_p,x)) = ||p_{F^\perp}(x)||^2\det(G(u_1,....,u_p))$.
5. En déduire que

$$d(x,F) = \sqrt{\frac{\det(G(u_1,...,u_p,x))}{\det(G(u_1,....,u_p))}}$$

6. Vérifier les résultats obtenus dans l'exercice précédent.